Correction des exercices sur le TD4

Solution de l'exercice 2

1°) **$P(U>1{,}96)$** = $1 - P(U<1{,}96) = 1 - F(1{,}96) = 1 - 0{,}9750 =$ **0,025**

$P(U<-1{,}96) =$ $F(-1{,}96) = 1 - F(1{,}96) =$ **0,025 = $P(U>1{,}96)$**

$P(U>2{,}575)$ = $\frac{1}{2}P(|U|>2{,}575) =$ **0,005**

2°) **$P(-1{,}21 < U < 1{,}53)$** = $F(1{,}53) - F(-1{,}21) = 0{,}9370 - (1 - F(1{,}21))$
$= 0{,}9370 - 1 + 0{,}8869$
$=$ **0,8239**

$P(|U| < 1{,}96)$ = $2F(1{,}96) - 1 = 2 \times 0{,}9750 - 1 =$ **0,95**

$P(U<u)$ = $F(u) = 1 - F(-u) =$ **0,1** $\Leftrightarrow F(-u) = 0{,}9$

Or $F(1{,}28) = 0{,}8997$ et $F(1{,}29) = 0{,}9015$

Donc **$-1{,}29 < u < -1{,}28$**

$P(|U| < u)$ = $2F(u) - 1 =$ **0,8** donc $F(u) = 0{,}9$ et donc **$1{,}28<u<1{,}29$**

Solution de l'exercice 3

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(2960\ ,\ 340)$ donc $U = \frac{X - 2960}{340} \hookrightarrow \mathcal{N}(0\ ,\ 1)$

$P(X > 3500)$ = $P(\frac{X-2960}{340} \geqslant \frac{3500-2960}{340})$

$= P(U \geqslant 1{,}59)$
$= 1 - F(1{,}59)$
$= 1-0{,}9441$
$= 0{,}0559$

$0{,}0559 \times 100 = 5{,}59$

Entre 5 et 6 athlètes seront retenus si l'on ne veut sélectionner que ceux dont la performance est supérieure à 3500 m.

Solution de l'exercice 4

1°) Soit X = v.a égale à la longueur des sauts.

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(4\ ,\ 0{,}7)$ donc $T = \frac{X - 4}{0{,}7} \hookrightarrow \mathcal{N}(0\ ,\ 1)$

- $P(X < 2{,}8) = P(\frac{X-4}{0{,}7} < \frac{2{,}8-4}{0{,}7})$

  $P(X < 2{,}8) = P(T < -1{,}71)$
  $= F(-1{,}71)$
  $= 1 - F(1{,}71)$
  $= 1 - 0{,}9564$
  $= 0{,}0436$

Donc 4,36 % des adolescents ont une performance inférieure à 2,80 m.

- $P(X>4{,}70) = P(\frac{X-4}{0{,}7} > \frac{4{,}7-4}{0{,}7})$
  $= P(T > 1)$
  $= 1 - P(T < 1)$
  $= 1 - F(1)$
  $= 1 - 0{,}8413$
  $= 0{,}1587$

Donc 15,87 % des adolescents ont une performance supérieure à 4,70 m.

2°) $P(3{,}65 < X < 4{,}90)$
$= P(\frac{3{,}65-4}{0{,}7} < \frac{X-4}{0{,}7} < \frac{4{,}90-4}{0{,}7})$
$= P(-0{,}5 < T < 1{,}286)$
$= F(1{,}286) - F(-0{,}5)$
$= F(1{,}286) - 1 + F(0{,}5)$
$= 0{,}9015 - 1 + 0{,}6915$
$= 0{,}593$

$0{,}593 \times 300 \approx 178$

Donc 178 adolescents sautent entre 3,65 m et 4,90 m.

3°) $P(X>a) = 0{,}3$

$\Leftrightarrow$ $1 - P(X<a) = 0,3$

$\Leftrightarrow$ $P(X<a) = 0,7$

$\Leftrightarrow$ $P(\frac{X-4}{0,7} < \frac{a-4}{0,7}) = 0,7$

$\Leftrightarrow$ $P(T < \frac{a-4}{0,7}) = 0,7$

$\Leftrightarrow$ $F(\frac{a-4}{0,7}) = 0,7$

$\Leftrightarrow$ $\frac{a-4}{0,7} = 0,52$

$\Leftrightarrow$ $a = 0,52 \times 0,7 + 4$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{a = 4,364\ m}$

Donc 30 % des adolescents sautent plus de 4,364 m.

Solution de l'exercice 5

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(10 , 3)$ donc $T = \frac{X - 10}{3} \hookrightarrow \mathcal{N}(0 , 1)$

1°) a) $P(X < 10) = F(0) = \mathbf{0,5}$

b) $P(X>12) = P(\frac{X-10}{3} > \frac{12-10}{3})$

$= P(T > 0,67)$

$= 1 - F(0,67)$

$= 1 - 0,7486$

$= \mathbf{0,2514}$

c) $P(8 < X < 12) = P(\frac{8-10}{3} < \frac{X-10}{3} < \frac{12-10}{3})$

$= P(-0,67 < T < 0,67)$

$= F(0,67) - F(-0,67)$

$= F(0,67) - 1 + F(0,67)$

$= 2 \times F(0,67) - 1$

$= 2 \times 0,7486 - 1$

$= \mathbf{0,4972}$

2°) $P(X > a) = 0,9 \Leftrightarrow P(\frac{X-10}{3} > \frac{a-10}{3}) = 0,9$

$\Leftrightarrow P(T>\frac{a-10}{3}) = 0,9$

$\Leftrightarrow F(-\frac{a-10}{3}) = 0,9$

$\Leftrightarrow \frac{10-a}{3} = 1,28$

$\Leftrightarrow \mathbf{a} = 10 - 3 \times 1,28 = 10 - 3,84 = \mathbf{6,16}$

3°) $P(X>a) = \frac{100}{800} = 0,125 \Leftrightarrow P(\frac{X-10}{3} > \frac{a-10}{3}) = 0,125$

$\Leftrightarrow P(T > \frac{a-10}{3}) = 0,125$

$\Leftrightarrow 1 - F(\frac{a-10}{3}) = 0,125$

$\Leftrightarrow F(\frac{a-10}{3}) = 0,875$

$\Leftrightarrow \frac{a-10}{3} = 1,15$

$\Leftrightarrow \mathbf{a} = 1,15 \times 3 + 10 = \mathbf{13,45}$

4°) $P(X<a) = \frac{200}{800} = 0,25 \Leftrightarrow P(\frac{X-10}{3} < \frac{a-10}{3}) = 0,25$

$\Leftrightarrow F(\frac{a-10}{3}) = 0,25$

$\Leftrightarrow F(-\frac{a-10}{3}) = 0,75$

$\Leftrightarrow \frac{10-a}{3} = 0,67$

$\Leftrightarrow \mathbf{a} = 10 - 0,67 \times 3 \approx \mathbf{8}$

Solution de l'exercice 6

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(32,3\ ;\ 72,25)$ donc $T = \dfrac{X - 32,3}{8,5} \hookrightarrow \mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

De plus : P(X > a) = 0,1

$\Leftrightarrow$ $P(T > \dfrac{a - 32,3}{8,5}) = 0,1$

$\Leftrightarrow$ 1 – F(a-32,3/28)= 0,1

$\Leftrightarrow$ $F(\dfrac{a - 32,3}{8,5}) = 0,9$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{a - 32,3}{8,5} = 1,28$

$\Leftrightarrow$ a = 8,5 ×1,28 + 32,3

$\Leftrightarrow$ a = 43,18

Donc à partir de 43,18, les 10 % des sujets seront orientés ailleurs parce que leur niveau est trop haut.

Ensuite : $P(X < b) = 0,3 \Leftrightarrow P(T < \dfrac{b - 32,3}{8,5}) = 0,3 \Leftrightarrow F(\dfrac{b - 32,3}{8,5}) = 0,3 \Leftrightarrow 1 - F(\dfrac{b - 32,3}{8,5}) = 1 - 0,3$

$\Leftrightarrow F(-\dfrac{b - 32,3}{8,5}) = 0,7 \Leftrightarrow F(\dfrac{-b + 32,3}{8,5}) = 0,7$. Or F(0,52) = 0,6985 donc $\dfrac{-b + 32,3}{8,5} = 0,52$

Donc – b = 8,5 × 0,52 – 32,3 $\Leftrightarrow$ - b = 4,42 – 32,3 $\Leftrightarrow$ b ≈ 27,88

Donc les élèves qui ont une note inférieure ou égale à 27,88 seront orientés ailleurs parce que leur niveau est trop bas.

Donc les notes du candidat devront être comprises entre 27,85 et 43,18 pour qu'il soit admis dans la section d'apprentissage.

Vérification : Les notes comprises entre 27,85 et 43,18 doivent représenter 60 % des notes.

$P(27,85 \leqslant X \leqslant 43,18) = P(\dfrac{27,85 - 32,3}{8,5} \leqslant T \leqslant \dfrac{43,18 - 32,3}{8,5})$

$= P(-0,52 \leqslant T \leqslant 1,28)$

$= F(1,28) - F(-0,52)$

$= F(1,28) + F(0,52) - 1$

$= 0,8997 + 0,6985 - 1$

$= 0,5982$ *(on obtient bien 60 % approximativement)*

Solution de l'exercice 7

1ère Partie

1) *Remarque : Vous pouvez utiliser le mode statistiques de votre calculatrice (se reporter à la fiche « L'usage des calculatrices »)*

m $= \dfrac{6 \times 250 + ... + 18 \times 101}{250 + ... + 101} \approx$ **11,40** et **σ ≈ 2,71**

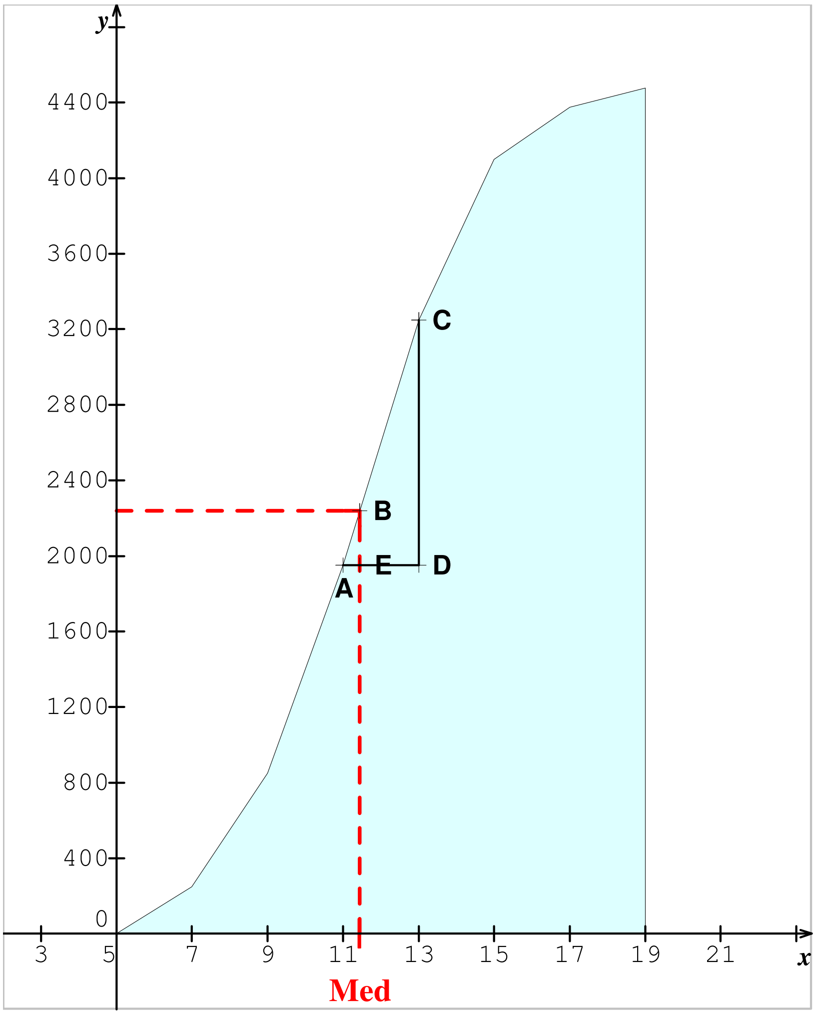
2) La médiane correspond à la note obtenue par le 2238ème effectif. Comme nous avons des classes, il faut effectuer une interpolation linéaire.

xi	7	9	11	**Me**	13	15	17	19
Σ ni	250	850	1950	**2238**	3250	4100	4375	4476

On a alors, comme 2238 ∈ [1950 ; 3250], Me ∈ [11 ; 13] et donc :

$\dfrac{Me - 11}{13 - 11} = \dfrac{2238 - 1950}{3250 - 1950} \Leftrightarrow \dfrac{Me - 11}{2} = \dfrac{288}{1300} \Leftrightarrow Me = \dfrac{2 \times 288}{1300} + 11 \Leftrightarrow$ **Me ≈ 11,44**

On peut également utiliser le polygone des effectifs cumulés croissants mais c'est plus long.



3)a) P(9 ⩽X<13) = $\frac{1100 + 1300}{4476} = \frac{2400}{4476} \approx$ **0,54**

b) P(X<9) + P(X ⩾ 15) = $\frac{850 + 376}{4476} = \frac{1226}{4476} \approx$ **0,27**

2ème Partie

Remarque : Pour la loi normale centrée réduite, il y a ces formules à retenir :
P(X>a) = 1 – F(a) = F(-a)
P(a < X < b) = F(b) – F(a)

On a Z = $\frac{X - 11,4}{2,71} \hookrightarrow$ N(0 ; 1)

1) P(9 < X < 13) = P($\frac{9 - 11,4}{2,71} < \frac{X- 11,4}{2,71} < \frac{13 - 11,4}{2,71}$) = P(-0,89 < Z < 0,6)
= F(0,6) – F(-0,89)
= F(0,6) – (1 – F(0,89))
= F(0,6) – 1 + F(0,89)
= 0,7257 – 1 + 0,8133
= **0,539**

On remarque que l'approximation normale est une bonne approximation.

2) P(X > a) = 0,87
P(Z > $\frac{a - 11,4}{2,71}$) = 0,87
F($\frac{11,4\text{-}a}{2,71}$) = 0,87
1,12 < $\frac{11,4 - a}{2,71}$ < 1,13
2,71 ×1,12 < 11,4 -a < 2,71 ×1,13
3,0352 < 11,4 – a < 3,0623
3,0352 – 11,4 < -a < 3,0623 – 11,4
-8,3648 < -a < -8,3377
8,3648 > a > 8,3377
8,3377 < a < 8,3648
86 % des lycéens ont dépassé 8,33.

Solution de l'exercice 8

1) On a $\overline{x} \approx$ **311,64** et **$\sigma \approx$ 18,67**

2) La médiane correspond à la note obtenue par le 250ème effectif. Comme nous avons des classes, il faut effectuer une interpolation linéaire.

xi	275	285	295	305	**Me**	315	325	335	345	355
Σ ni	12	42	97	182	**250**	282	376	444	483	500

On a alors, comme 250 $\in$[182 ; 282], Me $\in$ [305 ; 315] et donc :

$\frac{Me\text{-}305}{315-305} = \frac{250-182}{282-182} \Leftrightarrow \frac{Me\text{-}305}{10} = \frac{68}{100} \Leftrightarrow Me = \frac{10\times 68}{100} + 305 \Leftrightarrow$ **Me = 311,8**

3) a) $P(X > 335) = \frac{39+17}{500} = \frac{56}{500} =$ **0,112**

c) Si on prend le tableau des effectifs cumulés croissants, on a **305s** pour le temps minimum dépassé par les 124 plus rapides nageurs.

4) $Z = \frac{X-312}{18,7} \hookrightarrow N(0\ ;\ 1)$

a) $P(X > 335) = P(\frac{X-312}{18,7} > \frac{335-312}{18,7}) = P(Z > 1,23) = 1 - F(1,23) = 1 - 0,8907 =$ **0,1093**

b) $\frac{124}{500} = 0,248$. On veut $P(X<a) = 0,248$

$P(\frac{X\text{-}312}{18,7} < \frac{a-312}{18,7}) = 0,248$

$P(Z < \frac{a-312}{18,7}) = 0,248$

$F(\frac{a-312}{18,7}) = 0,248$

$F(\frac{312\text{-}a}{18,7}) = 0,752$

$\frac{312-a}{18,7} \approx 0,68$

$312 - a \approx 18,7 \times 0,68$

$312 - a \approx 12,716$

$-a \approx 12,716 - 312 \qquad -a \approx -299 \qquad$ **$a \approx 299$**

4) On trouve des valeurs similaires avec la loi normale. L'ajustement proposé est donc justifié.

Solution de l'exercice 9

$Z = \frac{X-8,9}{2,4} \hookrightarrow N(0\ ;\ 1)$

1) $P(X > 10,5) = P(\frac{X-8,9}{2,4} > \frac{10,5-8,9}{2,4}) = P(Z > 0,66) = 1 - F(0,66) = 1 - 0,7454 =$ **0,2546**

2) $P(9,2 < X < 11,3) = P(\frac{9,2-8,9}{2,4} < Z < \frac{11,3-8,9}{2,4}) = P(0,125 < Z < 1) = F(1) - F(0,125)$

$= 0,8413 - 0,5517$

$=$ **0,2896**

3) $\frac{60}{480} = 0,125$ et donc on cherche a tel que $P(X>a) = 0,125$

$P(\frac{X\text{-}8,9}{2,4} > \frac{a-8,9}{2,4}) = 0,125$

$1 - F(\frac{a-8,9}{2,4}) = 0,125$

$F(\frac{a-8,9}{2,4}) = 0,875$

Donc $\frac{a\text{-}8,9}{2,4} \approx 1,15$

$a \approx 1,15 \times 2,4 + 8,9$

$a \approx 11,66$

Les 60 meilleurs athlètes ont dépassé 11,66 m.

Solution de l'exercice 10

1) $X \subset_{>} B(10\ ;\ 0{,}12)$
2) $P(X = 4) = \binom{10}{4} \times 0{,}12^4 \times 0{,}88^6 \approx$ **0,202**
3) $P(2 \leqslant X \leqslant 5) = P(X \leqslant 5) = P(X \leqslant 1) = 0{,}9996 - 0{,}6583 =$ **0,3413**

Solution de l'exercice 11

$Z = \frac{X - 2960}{340} \subset_{>} N(0\ ;\ 1)$

1) $P(X > 3200) = P(Z > \frac{3200 - 2960}{340}) = P(Z > 0{,}71) = 1 - F(0{,}71) = 1 - 0{,}7611 =$ **0,2389**

2) $p(X > a) = 0{,}1 \Leftrightarrow P(Z > \frac{a\text{-}2960}{340}) = 0{,}1 \Leftrightarrow 1 - F(\frac{a - 2960}{340}) = 0{,}1 \Leftrightarrow F(\frac{a\text{-}2960}{340}) = 0{,}9 \Leftrightarrow$

$1{,}28 < \frac{a\text{-}2960}{340} < 1{,}29 \Leftrightarrow 340 \times 1{,}28 < a - 2960 < 340 \times 1{,}29 \Leftrightarrow 435{,}2 + 2960 < a < 438{,}6 + 2960$

$\Leftrightarrow 3395{,}2 < a < 3398{,}6$

10 % des athlètes ont dépassé 3395,20 m.

Solution de l'exercice 12

$Z = \frac{X - 175}{9} \subset_{>} N(0\ ;\ 1)$

1) $P(X < 167) = P(\frac{X\text{-}175}{9} < \frac{167\text{-}175}{9})$
$= P(Z < -0{,}89)$
$= F(-0{,}89)$
$= 1 - F(0{,}89)$
$= 1 - 0{,}8133$
= **0,1867**

$P(X < 181) = P(Z < \frac{181 - 175}{9})$
$= F(0{,}67)$
= **0,7486**

2) $P(X<a) \approx 0{,}74$
$P(Z < \frac{a\text{-}175}{9}) \approx 0{,}74$
$0{,}64 < \frac{a\text{-}175}{9} < 0{,}65$
$0{,}64 \times 9 + 175 < a < 0{,}65 \times 9 + 175$
180,76 < a < 180,85

$P(X > b) \approx 0{,}66$
$P(Z > \frac{b\text{-}175}{9}) \approx 0{,}66$
$F(\frac{175\text{-}b}{9}) \approx 0{,}66$
$0{,}41 < \frac{175\text{-}b}{9} < 0{,}42$
$0{,}41 \times 9 - 175 < -b < 0{,}42 \times 9 - 175$
$-171{,}31 < -b < -171{,}22$
$171{,}31 > b > 171{,}22$
171,22 < b < 171,31